~ Λογικές Προτάσεις
Προτασιακός Λογισμός ~

Λογική Πρόταση, ή απλά πρόταση

καλείται μια έκφραση με πλήρες νόημα η οποία με τρόπο αντικειμενικό και όχι αντικειμενι μπορει να χαρακτηριστει και αληθής ή ψευδής

Π.χ.

Ο Νταλι ειναι ο καλύτερος ζωγράφος
Η Λαμια ειναι ωραια πολυ

Οι παραπανω εκφράσεις παρόλο που σύμφωνα με το συντακτικό της ελληνικης γλώσσας αποτελούν προτασεις δεν ειναι λογικές προτάσεις

Οι εκφρασεις
γ) Ο αριθμος 12 είναι πολλαπλάσιο του 3
δ) Ο αριθμος 14 είναι πολλαπλάσιο του 5
ε) Το πρωταθλημα Ελλάδος του 2019 το πηρε ο ΠΑΟΚ
είναι λογικές προτάσεις
οι γ), ε) ειναι αληθεις και δ) είναι ψευδης

Οι γ, δ εχουν μαθηματικό περιεχόμενο ενω η ε όχι!
Κυρίως ενδιαφερόμαστε για τις προτασεις με μαθηματικό περιεχομενο

Ο χαρακτηρισμός αληθής (συμβ Α)
ψευδής (συμβ Ψ)
που αποδιδουμε σε κάθε λογική προταση ονομάζονται τιμες αληθειας

Scanned with CamScanner

Η ανάθεση της τιμής Α (αλήθεια) ή Ψ ψευδής σε μια (λογική) πρόταση καλείται αποτίμηση της πρότασης

Συνήθως θα συμβολίζουμε τις προτάσεις με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου p, q, r, s, t

Λογικοί σύνδεσμοι - κατασκευή νέων προτάσεων από παλιές

1) Άρνηση Πρότασης

Αν P είναι πρόταση με την προσθήκη του συνδέσμου «όχι» (ή «δεν» ή «μη»)
Προκύπτει η πρόταση «όχι P» και συμβολίζεται με $\boxed{\sim p}$

Για παράδειγμα από τις προτάσεις
p: ο αριθμός 3 είναι πρώτος
q: ο αριθμός 6 είναι πρώτος
Προκύπτουν οι προτάσεις

~P: ο αριθμός 3 δεν είναι περιττός
~q: ο αριθμός 6 δεν είναι πρώτος

Ο επόμενος πίνακας δείχνει την αποτίμηση της πρότασης ~P συναρτήσει της αποτίμησης της πρότασης Σ

P	~P
A	Ψ
Ψ	A

Ο πίνακας αυτός δείχνει ότι, όταν η P είναι αληθής ~~~P~~ είναι ψευδής και όταν η P είναι ψευδής η ~P είναι αληθής

2) Σύζευξη προτάσεων

Αν p, q δυο προτάσεις με την προσθήκη του συνδέσμου "και" προκύπτει η πρόταση "p και q" η οποία συμβολίζεται με "$p \wedge q$".

Π.χ. Αν είχαμε τις προτάσεις "p"

"p" ο αριθμός 7 είναι άρτιος.

"q" ο αριθμός 20 είναι άρτιος.

με τη χρήση του λογικού συνδέσμου "και" προκύπτει η σύζευξη $p \wedge q$ που είναι η πρόταση ο αριθμός 7 είναι άρτιος και ο αριθμός 20 είναι άρτιος

Ο πίνακας αλήθειας ~~που ακολουθεί~~ για την πρόταση $p \wedge q$ συναρτήσει της αποτίμησης των p, q είναι ο εξής

p	q	$p \wedge q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Ο πίνακας αυτός δείχνει ότι η $p \wedge q$ είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που οι p, q είναι και οι δύο αληθείς

3) Εγκλειστική Διάζευξη

ή απλά διάζευξη δύο προτάσεων

Αν p, q δυο προτάσεις με χρήση του συνδέσμου "ή" προκύπτει η πρόταση "p ή q" η οποία συμβολίζεται "$p \vee q$"

p	q	$p \vee q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Η $p \vee q$ θεωρείται ψευδής μόνο στην περίπτωση όταν οι p, q είναι και οι δύο ψευδείς

4) Συνεπαγωγή

Από δύο προτάσεις p, q προκύπτει η πρόταση

• «Αν p τότε q» η οποία συμβολίζεται $p \Rightarrow q$ δηλ. αλλιώς «p συνεπάγεται q»

Δύο ακόμα εκφράσεις που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής

«Η p είναι ικανή συνθήκη για την q»

«Η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p»

Πίνακας αληθείας

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Η «p συνεπάγεται q» είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η p είναι αληθής και η q ψευδής

Η p καλείται υπόθεση και το q συμπέρασμα επί πρότασης $p \Rightarrow q$

Ασκ 2 | συλλ ①

$6\sin^4x + \sin^2x - 2 = 0 \quad / [0, 3\pi]$

θέτω $\sin^2x = u$

$6u^2 + u - 2$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 6(-2)$
$= 1 + 48 = 49$

$u_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{12}$ $\Big[$ $\frac{1}{2}$; $\frac{-8}{12} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ απορ

$\sin^2x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ $\quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$

Για $k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{4}$

Για $k=1 \Rightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ $\quad x = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$

Για $k=2 \Rightarrow x = 4\pi + \frac{\pi}{4}$ απορ $\quad x = 4\pi + \frac{3\pi}{4}$ απορ

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ή

$x = 2k\pi \cancel{+} \pi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$

Για $k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ απορ
$x = -\frac{3\pi}{4}$ απορ

Για $k=1$ $\quad x = \frac{7\pi}{4}$
$x = \frac{8\pi - 3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Για $k=2$
$x = 4\pi - \frac{\pi}{4}$ απορ
$x = 4\pi - \frac{3\pi}{4}$ απορ

- Άρα $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Ασκ 4 / ΦυΜΘ

$\tan(a) = -\sqrt{27}$

Γ

$\sin(x+a) = -2\sin(x-a) \Longrightarrow$

$\sin x\cos a + \sin a\cos x = -2(\sin x\cos a - \sin a\cos x)$

$\sin x\cos a + \sin a\cos x = -2\sin x\cos a + 2\sin a\cos x$

$\sin x\cos a + \sin a\cos \cancel{x} \Longrightarrow$

$3\sin x\cos a = \sin a\cos x$

~~3 tan a~~

$3\sin x = \tan a\cos x$

$\Longleftrightarrow \quad 3\sin x = -3\sqrt{3}\cos x$

Αν ισχύει $\cos x = 0$ τότε από την παραπάνω σχέση θα προέκυπτε $\sin x = 0$ και άρα $1 = \sin^2 x + \cos^2 x = 0^2 + 0^2 = 0$ άτοπο.

Άρα $\cos x \neq 0$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\tan x = -\sqrt{3}$

$\tan x = -\tan\frac{\pi}{3}$

$\tan x = \tan(-\frac{\pi}{3})$ $\qquad$ $x = k\pi - \frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

Scanned with CamScanner

Άσκ 5 / Φυλλ 1

$$\sin 5x + \sqrt{2}\sin(10x) + \sin(15x) = 0$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$(\sin 5x + \sin 15x) + \sqrt{2} + \sin 10x = 0 \iff$$

$$2\sin(10x)\cdot\cos(-5x) + \sqrt{2} + \sin 10x = 0 \iff$$

$$\sin(10x)\left[2\cos(5x) + \sqrt{2}\right] = 0$$

$$\sin 10x = 0 \quad \cancel{\Rightarrow x =}$$

ή

$$\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos 5x = -\cos\frac{\pi}{4} \iff$$

$$\cos 5x = \cos\left[\pi - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\sin 10x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

$$\cos 5x = \cos\left[\pi - \frac{\pi}{4}\right]$$

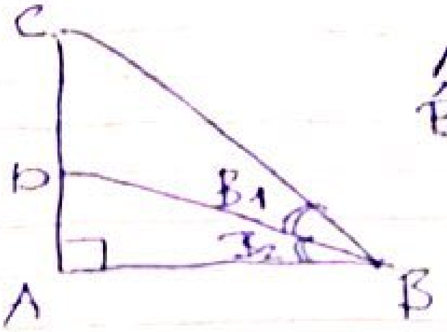
$$5x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{5}{1}} = \frac{2k\pi}{5} - \frac{3\pi}{20}$$

ή

$$5x = 2k\pi + \cancel{\pi} - \cancel{\pi} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{20}$$

Ασκ 6/φυλλ (1)



$AC = 5AD$

$\hat{B} = D\hat{B}C$ Νδο $\tan(\hat{B}_1) = \frac{4\tan B}{5+\tan^2 B}$

Θέτω $\hat{B}_2 = A\hat{B}D$

$\tan(B_2) = \frac{AD}{AB} = \frac{1/5\,AC}{AB} = \frac{1}{5}\tan B$

$$\tan\hat{B}_1 = \tan(\hat{B}-\hat{B}_2)$$

$$= \frac{\tan B - \tan B_2}{1+\tan B \tan B_2} = \frac{\tan B - 1/5\tan B}{1+\tan B\frac{1}{5}\tan B}$$

$$= \frac{4/5\tan B}{1+\frac{1}{5}\tan^2 B} = \frac{4\tan B}{5+\tan^2 B}$$

Ασκ 1 / φυλλ ①

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

a) $-\frac{11\pi}{8}$

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{8}\right) = \cos\left[-\frac{11\pi}{8}+2\pi\right] = \cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left[\pi-\frac{3\pi}{8}\right] = -\cos\frac{3\pi}{8} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi 3}{8}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin -\frac{11\pi}{8} = \sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}$$

$$= \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{11\pi}{8}\right) = \frac{\sin -\frac{11\pi}{8}}{\cos -\frac{11\pi}{8}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\cot\left(-\frac{11\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$2\pi = \frac{24\pi}{12}$

$2040 = 24 \cdot 85$ $\quad 2016 = 24 \cdot 84$

$\cos\left(-\frac{2021\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2040\pi}{12} - \frac{2021\pi}{12}\right)$

$= \cos\frac{19\pi}{12} = \cos\left(\pi + \frac{7\pi}{12}\right)$

$= -\cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right] = -(-\sin\frac{\pi}{12}$

$= +\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{19\pi}{12} = \sin\left[2\pi - \frac{5\pi}{12}\right] = \sin -\frac{5\pi}{12}$

$= -\sin\frac{5\pi}{12} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\tan -\frac{2021\pi}{12} = \frac{\sin -\frac{2021\pi}{12}}{\cos\frac{2021\pi}{12}} = \quad \sqrt{2}$

11

Άσκ 3/φυλλ (1)

$\sqrt{6}\sin(2x) + \sqrt{2}\cos(2x) + 2 = 0$

$((\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 = 6+2 = 8)$

$\sqrt{6}\sin(2x) + \sqrt{2}\cos(2x) = -2$

Διαιρώ τα δύο μέλη $2\sqrt{2}$

$\frac{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{3}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\sin 2x + \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\cos 2x = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$2x+\frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{12} = k\pi - \frac{\pi}{8}$

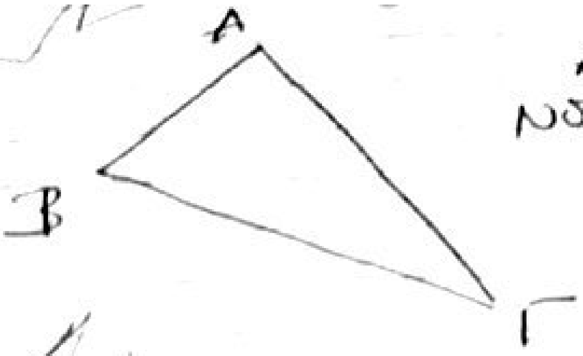
$\boxed{x = k\pi - \frac{3\pi - 2\pi}{24} = k\pi - \frac{5\pi}{24}}$

ή

$2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$

$x + \frac{\pi}{12} = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{12}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = k\pi + \frac{3\cdot 5\pi}{24} - \frac{2\pi}{24} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{13\pi}{24}}$



Αν ΑΒΓ τυχαίο τρίγωνο
Ν.δ.ο. $\sin A+\sin B+\sin \Gamma = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}$

Λύση

$$(\sin A+\sin B)+\sin\Gamma = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\Gamma$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{2\Gamma}{2}$$

$$=2\cos\frac{\Gamma}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{\Gamma}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}$$

$$=2\cos\frac{\Gamma}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{\Gamma}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{\Gamma}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{\Gamma}{2}\left(2\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{\Gamma}{2}\,2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{\Gamma}{2}$$